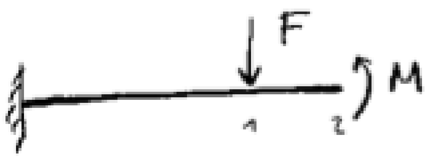
Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

1 Satz von Maxwell und Betti



Erinnere zunächst an die gesamte Formänderungsenergie in diesem System. Präge zuerst $K^1 = F_1$, danach $K^2 = M_2$ auf.
Anmerkung:
Der Buchstabe K wird in diesem Kontext für generalisierte Kräfte verwendet. K kann also Kräfte oder Momente bedeuten. Analog werden mit f generalisierte Verschiebungen, also Verschiebungen oder Verdrehwinkel bezeichnet.

Dann gilt:

$$W^{s*} = \frac{1}{2}\alpha^{11}\left(K^1\right)^2 + \alpha^{12}K^1K^2 + \frac{1}{2}\alpha^{22}\left(K^2\right)^2$$

Nun wird erst $K^2 = M_2$, danach $K^1 = F_1$ aufgeprägt. Es muss die selbe Formänderungsenergie resultieren:

$$W^{s*} = \int K^1\,\mathrm{d}(\alpha^{11}K^1) + \int K^2\,\mathrm{d}(\alpha^{12}K^2) + \int K^2\,\mathrm{d}(\alpha^{22}K^2)$$
$$W^{s*} = \frac{1}{2}\alpha^{22}\left(K^2\right)^2 + \alpha^{21}K^2K^1 + \frac{1}{2}\alpha^{11}\left(K^1\right)^2$$

Wir folgern (Satz von Betti):

$$\alpha^{12}K^1K^2 = \alpha^{21}K^2K^1 \tag{1}$$
$$\alpha^{12} = \alpha^{21} \qquad \text{(Satz von Maxwell, Reziprozitätsprinzip)} \tag{2}$$

Ziel: Die Verschiebung (Auslenkung) in 1 aufgrund der Kraft (des Moments) in 2, also gesucht: w_{12}

(i) $K^1 = F_1 \equiv 0$:

Die gesuchte Verschiebung w_{12} finden wir als generalisierte Verschiebung f_1. Nach dem Lehrbuch S. 409ff dürfen wir also schreiben: $f^k = \alpha^{kn}K^n$

$$\Rightarrow \quad w_{12} = f^1 = \alpha^{11}\underbrace{\cancel{K^1}}_{=0} + \alpha^{12}K^2, \quad \text{neues Ziel: } \alpha^{12} = \ ? \tag{\#}$$

Wir notieren die Einheiten:

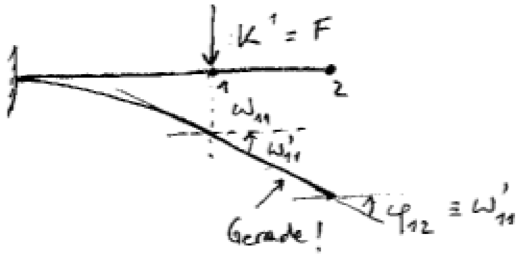
$$\dim\left[f^1\right] = \mathrm{m},\ \dim\left[K^2\right] = \mathrm{Nm} \ \Rightarrow \ \dim\left[\alpha^{12}\right] = 1/\mathrm{N}.$$

Wegen (2) folgt damit

$$\dim\left[\alpha^{21}\right] = 1/\mathrm{N}$$

Aus dem bekannten System mit der Kraft K^1 kann man nun das gesuchte α^{21} berechnen.

(ii) $K^2 = 0$:



Aus der Beziehung $f^k = \alpha^{kn} K^n$ erhalten wir

$$f^2 = \alpha^{21} K^1 + \alpha^{22} \underbrace{\cancel{K^2}}_{=0}. \qquad (\#\#)$$

In diesem Fall liefert die Untersuchung der Einheiten:

$$\dim[K^1] = \mathrm{N}, \dim[\alpha^{21}] = 1/\mathrm{N} \Rightarrow \dim[f^2] = 1.$$

Die generalisierte Verschiebung f^2 hat also Dimension eines Winkels, oder im Fall der Biegelinie die Dimension einer Steigung. Daraus folgt unter Berücksichtigung, dass $w'(x = a) = w'(x = a + b)$ (siehe Skizze):

$$f^2 = \varphi_{12} \equiv w'_{11} = \frac{Fa^2}{2EI}.$$

Der letzte Ausdruck folgt aus der Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung für den Bereich $0 \leq x \leq a$:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{Fa^3}{6EI}\left(3\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}\right) \\ \Rightarrow \quad w'(x) &= \frac{Fa^3}{6EI}\left(\frac{6x}{a^2} - \frac{3x^2}{a^3}\right) \\ \Rightarrow \quad w'_{11} = w'(x = a) &= \frac{Fa^2}{2EI} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (##) finden wir also zunächst die Einflusszahl

$$\alpha^{21} = \alpha^{12} = \frac{a^2}{2EI}$$

und daraus mit Gleichung (#) die gesuchte Verschiebung

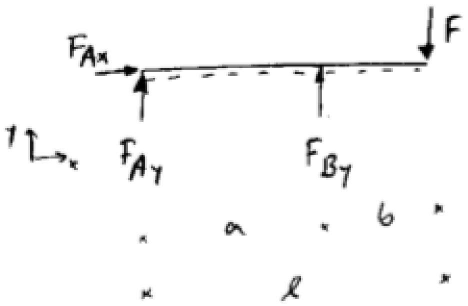
$$w_{12} = \frac{a^2 M}{2EI}.$$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

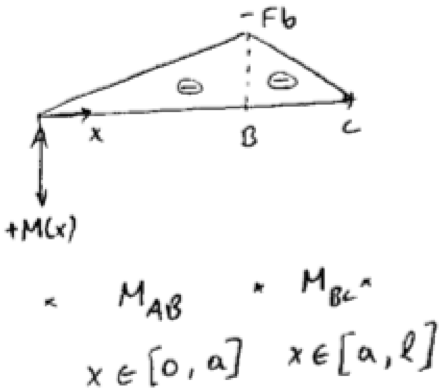
2 Satz von Castigliano

2.1

i) Freischnitt:



ii) Momentenverlauf:



$$M_{AB} = -Fb\,\frac{x}{a}$$

$$M_{BC} = -Fb\,\frac{x-l}{a-l}$$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

iii) Komplementäre Formänderungsenergie:

Weg 1: Elementare Integration der Schnittlastenfunktionen.

$$
\begin{aligned}
W^{s*} &= \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2EI}\left(\int_0^a M_{AB}^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^l M_{BC}^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2EI}\left(F^2b^2\frac{x^3}{3a^2}\bigg|_0^a + F^2b^2\frac{\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}l + l^2x}{(a-l)^2}\bigg|_a^l\right) \\
&= \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}F^2b^2a + \frac{F^2b^2}{(a-l)^2}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \cancel{l^3} + a^2l + \cancel{l^3} - l^2a\right)\right) \\
&= \frac{F^2b^2}{2EI}\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{(a-l)^2}\left(\frac{(l-a)(l^2+la+a^2)}{3} - \frac{al(l-a)}{1}\right)\right) \\
&= \frac{F^2b^2}{6EI}\left(a + \frac{l^2+a^2-2la}{l-a}\right) \\
&= \frac{F^2b^2}{6EI}\big(a + (l-a)\big) \\
&= \frac{F^2b^2}{6EI}l
\end{aligned}
$$

Weg 2: Nutzung der Tabelle für Kopplungsintegrale.

$$W^{s*} = \frac{1}{2EI}a$$  $$+ \frac{1}{2EI}b$$ 

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2EI}a\frac{1}{3}F^2b^2 + \frac{1}{2EI}b\frac{1}{3}F^2b^2 \\
&= (a+b)\frac{F^2b^2}{6EI} = \frac{F^2b^2}{6EI}l
\end{aligned}
$$

Nun verwenden wir den ersten Satz von Castigliano, um zunächst die Verschiebung in C zu berechnen:

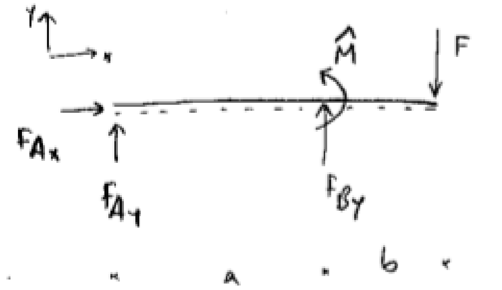
$$\frac{\partial W^{s*}}{\partial F} = u_c$$

Mit der zuvor berechneten komplementären Formänderungsenergie folgt hieraus:

$$u_c = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{F^2b^2}{6EI}l\right) = \frac{2Fb^2}{6EI}l = \frac{Fb^2l}{3EI}.$$

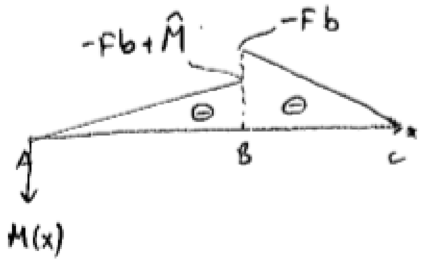
Für die Bestimmung der Verdrehung in B mithilfe des Satzes von Castigliano bräuchte man jedoch ein externes Moment in B. Daher führen wir ein „virtuelles“ Moment $\hat{M}$ im Punkt B ein und berechnen für diesen neuen Fall Lagerreaktionen und Momentenverlauf:

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin



Die Gleichgewichtsbedingungen liefern:

$$\sum F_x = 0 : F_{Ax} = 0$$
$$\sum F_y = 0 : F_{Ay} + F_{By} = F$$
$$\sum M^{(A)} = 0 : F_{By} a + \hat{M} = Fl$$



Daraus lässt sich die Momentenfläche aufziehen:

$$M(x) = \begin{cases} M_{AB}(x) = \left(-Fb + \hat{M}\right)\dfrac{x}{a}, & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ M_{BC} = -Fb\dfrac{x-l}{a-l} & \text{für } a \leq x \leq l \end{cases}$$

Hiermit lässt sich nun eine neue komplementäre Formänderungsenergie berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{W}^{s*} &= \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{F^2b^2}{6EI}l + \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\hat{M}^2 - 2Fb\hat{M}\right)\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{F^2b^2}{6EI}l + \frac{1}{6EI}\left(\hat{M}^2 - 2Fb\hat{M}\right)a \end{aligned}$$

Alternativ auch unter Verwendung der Tabelle für Kopplungsintegrale:

$W^{s*} = \frac{1}{2EI}a$  $+ \frac{1}{2EI}b$ 

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2EI}a\frac{1}{3}(\hat{M} - Fb)^2 + \frac{1}{2EI}b\frac{1}{3}F^2b^2 \\ &= \frac{F^2b^2}{6EI}l + \frac{1}{6EI}\left(\hat{M}^2 - 2Fb\hat{M}\right)a \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Castigliano lässt sich nun die Verdrehung im Punkt B für den Fall des aufgeprägten Moments $\hat{M}$ berechnen:

$$\varphi_B = \frac{\partial\hat{W}^{s*}}{\partial\hat{M}} = \frac{a}{6EI}\left(2\hat{M} - 2Fb\right)$$

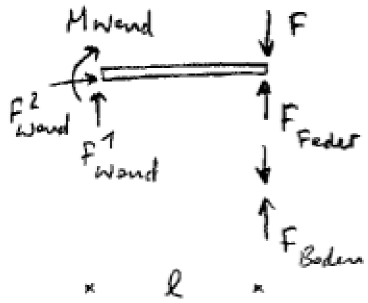
Wird in der letzten Gleichung $\hat{M} = 0$ gesetzt, so erhalten wir die gesuchte Verdrehung im Punkt B für den Ausgangsfall:

$$\varphi_B = -\frac{Fba}{3EI}.$$

Beachte, dass der berechnete Winkel in dem Drehsinn gezählt wird, in dem auch das virtuelle Moment eingetragen wurde.

2.2

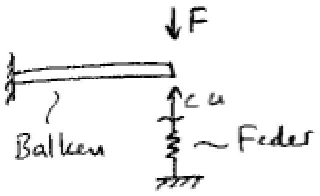
Freischnitt des Systems:



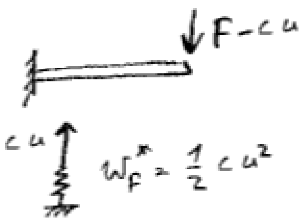
Wir sehen drei Lagerreaktionen an der Wand und eine Lagerreaktion am Boden, also vier Unbekannte. Dies bedeutet, dass es sich um ein statisch unbestimmtes System handelt.

Das System aus **B**alken und **F**eder enthält die Energie:

$$W^{s*} = W^{s*}_{\mathbf{B}} + W^{s*}_{\mathbf{F}}$$



Wir betrachten also die Formänderungen der beiden Teilsysteme:



Diese werden aufsummiert, um die komplementäre Formänderungsenergie des Gesamtsystems zu erhalten:

$$\begin{aligned} W^{s*} &= \underbrace{\frac{1}{2EI}\int_0^l \left(\pm(F-cu)l\frac{x}{l}\right)^2 \mathrm{d}x}_{W^{s*}_{\mathbf{B}}} + \underbrace{\frac{1}{2}cu^2}_{W^{s*}_{\mathbf{F}}} \\ &= \frac{1}{2EI}(F-cu)^2\frac{l^3}{3} + \frac{1}{2}cu^2 \end{aligned}$$

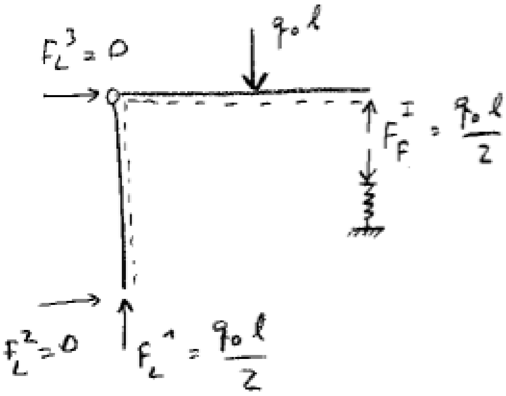
Nach dem Satz von Castigliano kann nun die Verschiebung berechnet werden:

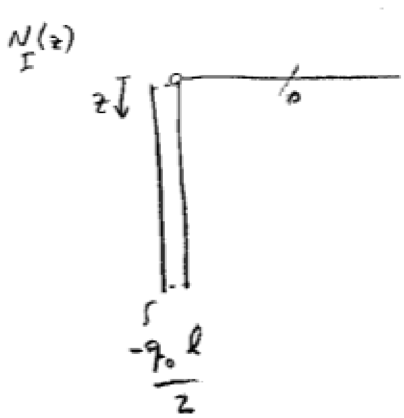
$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial W^{s*}}{\partial F} = \frac{l^3}{6EI}2(F-cu) \\ \Leftrightarrow \quad u\left(3EI + l^3 c\right) &= l^3 F \\ \Leftrightarrow \quad u &= \frac{l^3 F}{3EI + l^3 c} \end{aligned}$$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 Hausaufgabe

Wir berechnen wieder Lagerlasten und daraus die Momentenverläufe:





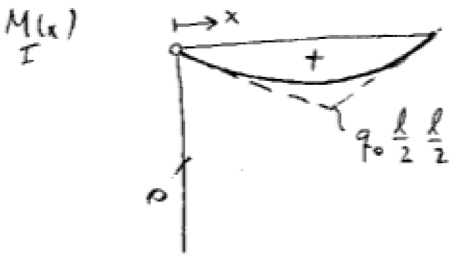
$$M_{\mathrm{I}}(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{wobei:}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}x}(x=0) = \frac{1}{2}q_0 l = b$$

$$\frac{\mathrm{d}M_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}x}(x=l) = -\frac{1}{2}q_0 l = 2al + b$$

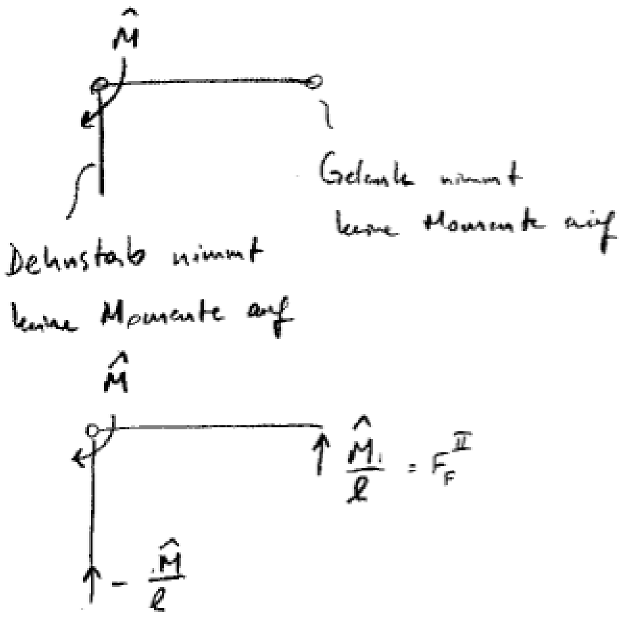
$$M_{\mathrm{I}}(x=0) = 0 = c$$

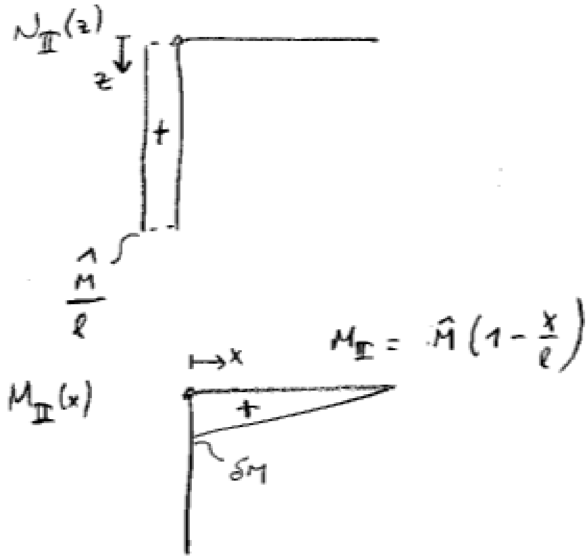
$$\Rightarrow \quad M_{\mathrm{I}}(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{1}{2}q_0 l x$$



Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Um die Verdrehung im Punkt A zu berechnen wird wieder ein Hilfsmoment $\hat{M}$ eingeführt:





Nun wird die komplementäre Formänderungsenergie des modifizierten Systems berechnet:

$$
\begin{aligned}
W^{s*} &= W^{s*}_{\text{Stab}} + W^{s*}_{\text{Balken}} + W^{s*}_{\text{Feder}} \\
&= \frac{1}{2EA} \int\limits_{z=0}^{z=l/2} N^2(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2EI} \int\limits_{x=0}^{x=l} M^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} c F_{\mathrm{F}}^2
\end{aligned}
$$

Der Verdrehwinkel im Punkt A ergibt sich durch differenzieren der komplementären Formänderungsenergie nach dem Hilfsmoment (Satz von Castigliano) und anschließendes nullsetzen desselben. Das soll mit folgender Schreibweise deutlich gemacht werden:

$$
\begin{aligned}
\varphi_A &= \left.\frac{\partial W^{s*}}{\partial \hat{M}}\right|_{\hat{M}=0} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial \hat{M}} \left(\frac{1}{2EA} \int\limits_{l/2} N^2(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2EI} \int\limits_{l} M^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} c F_{\mathrm{F}}^2 \right)\right|_{\hat{M}=0} \\
&= \left.\left(\frac{1}{2EA} \int\limits_{l/2} 2N \frac{\partial N}{\partial \hat{M}}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2EI} \int\limits_{l} 2M \frac{\partial M}{\partial \hat{M}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2c} 2F_{\mathrm{F}} \frac{\partial F_{\mathrm{F}}}{\partial \hat{M}} \right)\right|_{\hat{M}=0}
\end{aligned}
$$

Die abzuleitenden Größen sind:

$$
\begin{aligned}
N &= N_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{II}} &&= -q_0 \frac{l}{2} + \frac{\hat{M}}{l} \\
M &= M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} &&= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{2} q_0 l x + \hat{M}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\
F_{\mathrm{F}} &= F_{\mathrm{F}}^{\mathrm{I}} + F_{\mathrm{F}}^{\mathrm{II}} &&= \frac{q_0 l}{2} + \frac{\hat{M}}{l}
\end{aligned}
$$

Univ. Prof. Dr. rer nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Damit kann der obige Ausdruck weiter ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= \left. \left(\frac{1}{2EA} \int\limits_{l/2} \left(-q_0 l + \frac{2\hat{M}}{l} \right) \frac{1}{l} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2EI} \int\limits_{l} \left(-q_0 x^2 + q_0 l x + 2\hat{M} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{c} \left(\frac{q_0 l}{2} + \frac{\hat{M}}{l} \right) \frac{1}{l} \right) \right|_{\hat{M}=0} \\
&= \frac{1}{2EA} \int\limits_{l/2} (-q_0 l) \frac{1}{l} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2EI} \int\limits_{l} \left(-q_0 x^2 + q_0 \frac{x^3}{l} + q_0 l x - q_0 x^2 \right) \, \mathrm{d}x + \frac{q_0}{2c} \\
&= \left. \frac{-q_0}{2EA} z \right|_{z=0}^{z=l/2} + \left. \frac{q_0}{2EI} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4l} + l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_{x=0}^{x=l} + \frac{q_0}{2c} \\
\varphi_A &= -\frac{q_0 l}{4EA} + \frac{1}{12} \frac{q_0 l^3}{2EI} + \frac{q_0}{2c}
\end{aligned}$$