Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

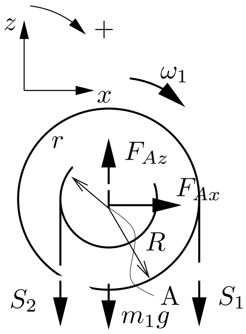
Aufgabe 1

Der Drallsatz für eine Punktmasse oder einen Punkthaufen kann erweitert werden auf räumlich ausgedehnte Körper. Für einen in der EBENE bewegten starren Körper gilt:

$$\frac{d}{dt}(\Theta^S\omega) = M^S \tag{1}$$

Zur Aufgabe:

<u>Freischnitt obere Rolle:</u>



Drehimpulssatz um das Lager A der oberen Riemenscheibe:

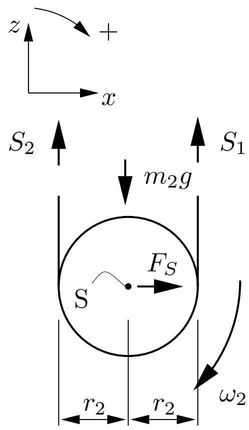
$$\Theta_1^{\mathrm{A}}\dot{\omega}_1 = S_1R - S_2r \tag{2}$$

Der Schwerpunktsatz (zweites Newtonsches Gesetz für den Schwerpunkt) liefert:

$$m_1\ddot{z}_1 = F_{Az} - S_1 - S_2 - m_1g \tag{3}$$

$$m_1\ddot{x}_1 = F_{Ax} \tag{4}$$

<u>Freischnitt untere Rolle:</u>



Drehimpulssatz um den Punkt S mit $r_2 = \frac{r+R}{2}$:

$$\Theta_2^{\mathrm{S}}\dot{\omega}_2 = S_2\frac{r+R}{2} - S_1\frac{r+R}{2} \tag{5}$$

Der Schwerpunktsatz liefert für die x-Komponente die unbekannte Lagerkraft F_S:

$$m_2\ddot{x}_2 = F_S \tag{6}$$

Die senkrechte Komponente bringt eine weitere Gleichung:

$$m_2\ddot{z}_2 = S_1 + S_2 - m_2g \tag{7}$$

Beschleunigung von S:

$$\underline{a}_S = \underline{\dot{v}}_S = \dot{v}_S\underline{e}_z = \ddot{z}_2\underline{e}_z$$

<u>Kinematik:</u>
Zählen der Unbekannten und Gleichungen ergibt: Man verfügt über sechs Gleichungen (2 Drallsätze und 4 Schwerpunktsätze), die momentan jedoch elf Unbekannte (Kräfte: S_1, S_2, F_{Ax}, F_{Az}, F_S und Bewegungsgrößen: $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{z}_1$, $\ddot{z}_2$, $\dot{\omega}_1$ und $\dot{\omega}_2$) enthalten. Es sind also weitere Gleichungen nötig, die man aus der Kinematik erhält:

Feste Lagerung der oberen Scheibe ergibt:

$$m_1 \ddot{z}_1 = 0$$
$$m_1 \ddot{x}_1 = 0$$

Hiermit erhält man zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten F_{Ax} und F_{Az}, nach denen nicht gefragt ist, also netto keine neue Information.
Aus Gleichung (6) kann mit der Bedingung $\ddot{x}_2 = 0$ die unbekannte Lagerreaktion F_S berechnen, nach der aber ebenfalls nicht gefragt ist.

Bleiben nun also die drei Gleichungen (2), (5) und (7), die die noch insgesamt fünf Unbekannten (S_1, S_2, ω_1, v_S und ω_2) enthalten. Wir benötigen somit noch zwei kinematische Zusatzbedingungen. Das System hat nur einen Freiheitsgrad, deshalb darf nur eine kinematische Größe übrigbleiben, die anderen müssen sich aus dieser einen ergeben:

Es sollen nun alle kinematischen Größen durch die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der oberen Scheibe ausgedrückt werden. Daher werden die Geschwindigkeiten des Riemens an der rechten bzw. linken Seite der Scheibe aufgestellt:

$$\underline{v}_\mathrm{rechts} = 0 + \omega_1 \underline{e}_y \times R \underline{e}_x = -R\omega_1 \underline{e}_z \tag{8}$$
$$\underline{v}_\mathrm{links} = 0 + \omega_1 \underline{e}_y \times (-r \underline{e}_x) = r\omega_1 \underline{e}_z \tag{9}$$

An der unteren Riemenscheibe erhält man die selben Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Bewegungsgrößen der unteren Scheibe:

$$\underline{v}_\mathrm{rechts} = \underline{v}_S + \omega_2 \underline{e}_y \times r_2 \underline{e}_x = (v_S - r_2\omega_2)\underline{e}_z \tag{10}$$
$$\underline{v}_\mathrm{links} = \underline{v}_S + \omega_2 \underline{e}_y \times (-r_2 \underline{e}_x) = (v_S + r_2\omega_2)\underline{e}_z \tag{11}$$

mit $r_2 = \frac{r+R}{2}$:

$$v_\mathrm{rechts} = v_\mathrm{S} - \frac{r+R}{2}\omega_2 \tag{12}$$
$$v_\mathrm{links} = v_\mathrm{S} + \frac{r+R}{2}\omega_2 \ . \tag{13}$$

Gleichungen (8) und (12) sowie (9) und (13) gleichgesetzt:

$$-R\omega_1 = v_\mathrm{S} - \frac{r+R}{2}\omega_2 \tag{14}$$
$$r\omega_1 = v_\mathrm{S} + \frac{r+R}{2}\omega_2 \ . \tag{15}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichungen erhält man schließlich:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{r-R} v_\mathrm{S} \ . \tag{16}$$

Durch Differentiation von Gl. (16) nach der Zeit erhält man

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \frac{2}{r-R} \dot{v}_\mathrm{S} \ . \tag{17}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Reduktion des Gleichungssystem
Aus den Gleichungen (2), (5), (7) und (17) werden jetzt die Größen S_1, S_2, ω_1 und ω_2 eliminiert, so dass nur eine Gleichung für v_{S} übrigbleibt:

Gleichung (7):

$$S_1 = m_2 \dot{v}_{\mathrm{S}} - S_2 + m_2 g$$

wird eingesetzt in (2) und (5):

$$\Theta_1^{\mathrm{A}} \dot{\omega}_1 = (m_2 \dot{v}_{\mathrm{S}} - S_2 + m_2 g) R - S_2 r \tag{18}$$

$$\Theta_2^{\mathrm{S}} \dot{\omega}_2 = S_2 \frac{r+R}{2} - (m_2 \dot{v}_{\mathrm{S}} - S_2 + m_2 g) \frac{r+R}{2} \ , \tag{19}$$

Durch Addition wird S_2 eliminiert:

$$\Theta_1^{\mathrm{A}} \dot{\omega}_1 + \Theta_2^{\mathrm{S}} \dot{\omega}_2 = \Big(m_2 \dot{v}_{\mathrm{S}} + mg \Big) \Big(R - \frac{r+R}{2} \Big) \tag{20}$$

und mit (17) ergibt sich

$$(\Theta_1^{\mathrm{A}} + \Theta_2^{\mathrm{A}}) \frac{2}{r-R} \dot{v}_{\mathrm{S}} = m_2 g \frac{R-r}{2} + m_2 \frac{R-r}{2} \dot{v}_{\mathrm{S}}$$

$$\hookrightarrow \dot{v}_{\mathrm{S}} = -g \frac{m_2 \big(\frac{R-r}{2} \big)^2}{\Theta_1^{\mathrm{A}} + \Theta_2^{\mathrm{S}} + m_2 \big(\frac{R-r}{2} \big)^2} \tag{21}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Integration:

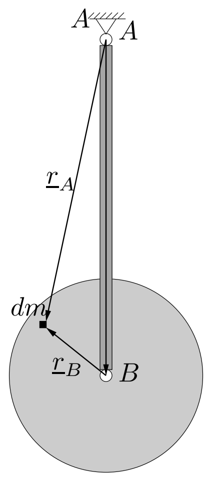
$$v_{\mathrm{S}} = -g \frac{m_2 \big(\frac{R-r}{2} \big)^2}{\Theta_1^{\mathrm{A}} + \Theta_2^{\mathrm{S}} + m_2 \big(\frac{R-r}{2} \big)^2} t + v(t=0) \tag{22}$$

wobei $v(t=0)$ die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts ist.

Aufgabe 2

(a)

Der in der Aufgabenstellung gemachte Hinweis lässt sich leicht zeigen. Dazu berechnen wir den Drehimpuls allgemein über das Integral:



$$\underline{L}_{vor}^{A} = \int_M \underline{r}_A \times \dot{\underline{r}}_A \mathrm{d}m = \int_{m_1} \underline{r}_A \times \underbrace{\dot{\underline{r}}_A}_{=0} \mathrm{d}m + \int_{m_2} \underline{r}_A \times \dot{\underline{r}}_A \mathrm{d}m \tag{23}$$

$$= \int_{m_2} \big(\underline{r}_{AB} + \underline{r}_B \big) \times \dot{\underline{r}}_B \mathrm{d}m \tag{24}$$

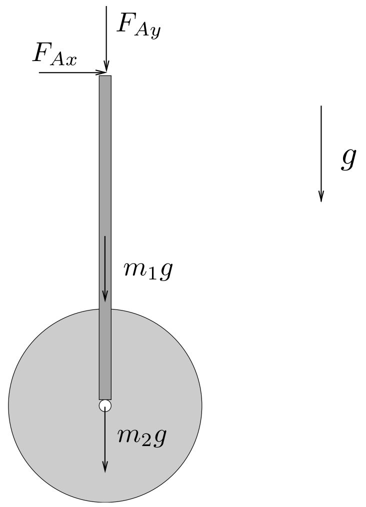
Wobei $\underline{r}_{AB}$ konstant ist und daher gilt $\dot{\underline{r}}_A = \dot{\underline{r}}_B$:

$$\underline{L}_{vor}^{A} = \underline{r}_{AB} \times \underbrace{\int_{m_2} \underline{v} \mathrm{d}m}_{=0} + \int_{m_2} \underline{r}_B \times \underline{v} \mathrm{d}m = \underline{L}_{vor}^{B} \tag{25}$$

Dass das erste Integrall null ist, dass erkennt man, wenn man sich jeweils zwei gegenüberliegende Punkte auf der unteren Scheibe anschaut. Bei einer reinen Drehung um B haben gegenüberliegende Punkte immer entgegengesetzte Geschwindigkeitsvektoren, sodass das Integral über den gesamten Körper 2 verschwindet.

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Freischnitt + Drehimpulserhaltung:
Der Drehimpuls des Gesamtsystems aus Stab und Scheibe bezogen auf den Lagerpunkt A bleibt erhalten:



$$L^A_{\text{vor}} = L^A_{\text{nach}} \tag{26}$$

$$\Theta_2\omega_2 = \Theta^A\omega_1 \tag{27}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\Theta_2}{\Theta^A}\omega_2 \tag{28}$$

Mit dem gesamten Massenträgheitsmoment bezüglich des Punktes A:

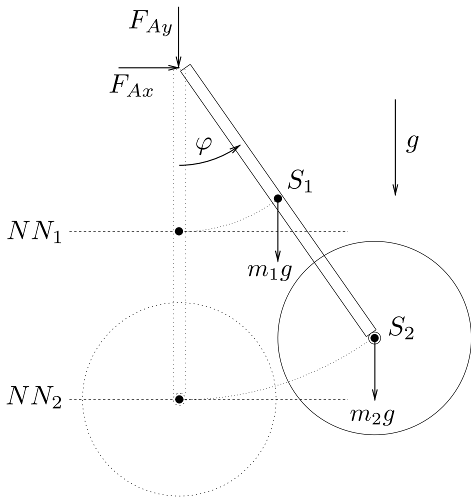
$$\Theta^A := \Theta^A_1 + \Theta^A_2 \tag{29}$$

$$= \Theta_1 + m_1\big(\frac{3}{2}r\big)^2 + \Theta_2 + m_2\big(3r\big)^2 \tag{30}$$

$$= \Theta_1 + \Theta_2 + \Big(\frac{9}{4}m_1 + 9m_2\Big)r^2 \tag{31}$$

(b) Es gibt zwei mögliche Wege, den Winkel zur maximalen Auslenkung des Systems zu berechnen:
Variante 1:

Freischnitt + Energieerhaltung:
Kinetische Energie des Systems unmittelbar nach der Blockierung:



$$E^{kin} = \frac{1}{2}\Theta^A\omega_1^2 \tag{32}$$

Die kinetische Energie am maximalen Ausschlag ist Null.

Die potentielle Energie in der Ausgangslage sei Null. Dann ist die potentielle Energie am maximalen Ausschlag:

$$E^{pot} = m_1g\cdot\frac{3}{2}r(1-\cos\varphi) + m_2g\cdot 3r(1-\cos\varphi) \tag{33}$$

Die Gesamtenergie bleibt erhalten, also gilt (Θ^A aus Gl. (31) bekannt):

$$E^{kin} = E^{pot} \tag{34}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Theta^A\omega_1^2 = m_1g\cdot\frac{3}{2}r(1-\cos\varphi) + m_2g\cdot 3r(1-\cos\varphi) \tag{35}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\Big(1 - \frac{\Theta^A\omega_1^2}{3(m_1+2m_2)gr}\Big) \tag{36}$$

Variante 2:

Lage des gemeinsamen Schwerpunkts r_S (Abstand zwischen dem gemeinsamen Schwerpunkt und dem Lagerpunkt A):

$$r_S = \frac{\sum_i r_i m_i}{\sum_i m_i} = \frac{\frac{3}{2}rm_1 + 3rm_2}{m_1+m_2} \tag{37}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{m_1+2m_2}{m_1+m_2}r \tag{38}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Massenträgheitsmoment des gesamten Systems bezogen auf seinen Schwerpunkt (Θ^A siehe Gl. (31)):

$$\Theta^S = \Theta^A - (m_1 + m_2) r_S^2 = \Theta^A - \frac{9}{4}\frac{(m_1 + 2m_2)^2}{m_1 + m_2} r^2$$
$$= \Theta_1 + \Theta_2 + \frac{9}{4}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \tag{39}$$

Kinetische Energie des Systems unmittelbar nach dem Stoß:

$$E^{kin}_{\text{Start}} = \frac{1}{2}\Theta^S \omega_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(r_S\omega_1)^2 \tag{40}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\Theta_1 + \Theta_2 + \frac{9}{4}\frac{m_1^2 + 5m_1m_2 + 4m_2^2}{m_1 + m_2} r^2\right]\omega_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\Theta_1 + \Theta_2 + \left(\frac{9}{4}m_1 + 9m_2\right) r^2\right]\omega_1^2 \tag{41}$$

Die kinetische Energie am maximalen Ausschlag ist Null:

$$E^{kin}_{\text{Ende}} = 0 \tag{42}$$

Das Nullniveau der potentiellen Energie soll auf Höhe des Lagers A liegen. Dann ist die potentielle Energie unmittelbar nach der Blockierung:

$$E^{pot}_{\text{Start}} = -(m_1 + m_2) g r_S \tag{43}$$

Die potentielle Energie am maximalen Ausschlag ist:

$$E^{pot}_{\text{Ende}} = -(m_1 + m_2) g r_S \cos\varphi \tag{44}$$

Die Gesamtenergie bleibt erhalten:

$$E^{kin}_{\text{Start}} + E^{pot}_{\text{Start}} = E^{kin}_{\text{Ende}} + E^{pot}_{\text{Ende}} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 1 - \frac{\Theta^S + (m_1 + m_2) r_S^2}{2(m_1 + m_2) g r_S}\omega_1^2 \tag{46}$$
$$= 1 - \left[\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{3(m_1 + 2m_2) g r} + \frac{\frac{9}{4}(m_1^2 + 5m_1m_2 + 4m_2^2) r^2}{3(m_1 + m_2)(m_1 + 2m_2) g r}\right]\omega_1^2$$
$$= 1 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + (\frac{9}{4}m_1 + 9m_2) r^2}{3(m_1 + 2m_2) g r}\omega_1^2 \tag{47}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem aus Variante 1.

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2 + (\frac{9}{4}m_1 + 9m_2) r^2}{3(m_1 + 2m_2) g r}\omega_1^2\right) \tag{48}$$

Aufgabe 3

Arbeitssatz:

$$E_1^{kin} + E_1^{pot} - E_0^{kin} - E_0^{pot} = W \tag{49}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Kin. und pot. Energie am Anfang:
Das Nullniveau wird auf Höhe des Mittelpunkts des Rades gelegt. Die Bewegung startet aus der Ruhe.

$$E_0^{kin} = 0, \tag{50}$$
$$E_0^{pot} = m_1 g y_0^S, \tag{51}$$

wobei für die Lage des Schwerpunkts der Stange zu Beginn, y_0^S, gilt:

$$y_0^S = \frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}L \tag{52}$$

Kin. und pot. Energie am Ende:
Die Stange ist am Ende waagerecht.

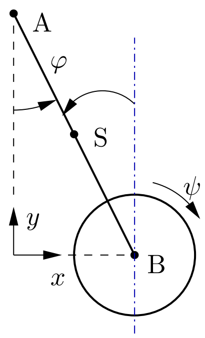
$$E_1^{kin} = \frac{1}{2}m_1 {v_1^S}^2 + \frac{1}{2}\Theta_1^S\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_1^B}^2 + \frac{1}{2}\Theta_2^B\dot{\psi}_1^2 \tag{53}$$
$$E_1^{pot} = 0 \tag{54}$$

Arbeit des Reibmoments:
Wie auch aus der Skizze in dem gegebenen Koordinatensystem zu sehen ist die Lage der Stange mit $+\varphi$ und die Lage des Rads $-\psi$ bestimmen im Punkt B wieviel Reibungsarbeit geleistet wird. Also die relative Bewegung der beiden Körper

$$\gamma(t) = (-\psi(t)) - (+\varphi(t)) \tag{55}$$

wird im Gelenk vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 1 die Reibungsarbeit hervorrufen

$$W = \int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)} M_R \mathrm{d}\gamma \tag{56}$$
$$W = M_R(\gamma(t_1) - \gamma(t_0)) \tag{57}$$
$$W = M_R(\gamma_1 - \gamma_0) \tag{58}$$
$$W = M_R(-\varphi_1 - \psi_1 + \varphi_0 + \psi_0) \tag{59}$$



Kinematik:
Für die verschiedenen Bewegungsgrößen aus der kinetischen Energie Gl. (53) müssen kinematische Beziehungen gefunden werden. Dafür werden die Ortsvektoren der Punkte A und B und damit S aufgestellt:

$$x_A = 0 \tag{60}$$
$$y_A = L\cos\varphi \tag{61}$$
$$x_B = L\sin\varphi \tag{62}$$
$$y_B = 0 \tag{63}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

$$\Rightarrow x_S = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{L}{2}\sin\varphi \tag{64}$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{L}{2}\cos\varphi \tag{65}$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_S = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi = v_x^S \tag{66}$$

$$\dot{y}_S = -\frac{L}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi = v_y^S \tag{67}$$

$$\Rightarrow v^S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2} = \frac{L}{2}\dot{\varphi} \tag{68}$$

$$\Rightarrow v^B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \dot{x}_B = L\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{69}$$

$$\Rightarrow v^A = |\dot{y}_A| = L\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{70}$$

Zwischen dem Winkel φ und dem Winkel ψ lässt sich mit der Bedingung „Reines Rollen“ des Rades auf der Ebene folgender Zusammenhang finden:

$$r\dot{\psi} = v_B \tag{71}$$

$$\dot{\psi} = \frac{v_B}{r} = \frac{L}{r}\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{72}$$

$$\psi = \frac{L}{r}\sin\varphi \quad (\text{mit } \varphi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0) \tag{73}$$

Werte am Anfang:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \tag{74}$$

$$\psi_0 = \frac{L}{r}\sin\varphi_0 = \frac{1}{2}\frac{L}{r} \tag{75}$$

Werte am Ende:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \tag{76}$$

$$v_1^A = |L\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1| = L\dot{\varphi}_1 \tag{77}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{L}v_1^A \tag{78}$$

$$v_1^S = \frac{L}{2}\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2}v_1^A \tag{79}$$

$$v^B = L\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 = 0 \tag{80}$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{L}{r}\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 = 0 \tag{81}$$

$$\psi_1 = \frac{L}{r}\sin\varphi_1 = \frac{L}{r} \tag{82}$$

Alles eingesetzt in (49):

$$\frac{1}{2}m_1\frac{1}{4}{v_1^A}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m_1L^2\frac{1}{L^2}{v_1^A}^2 - m_1gL\frac{\sqrt{3}}{4} = M_R\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{L}{r} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{L}{r}\right) \tag{83}$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

$$\Rightarrow v_1^A = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}gL - \frac{M_R}{m_1}[2\pi + 3\frac{L}{r}]} \tag{84}$$