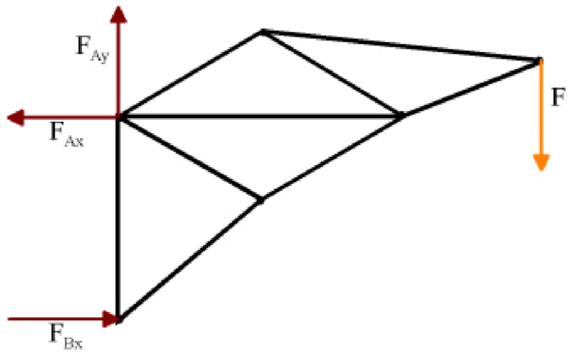
Klausur WS1997/98

Aufgabe 1

a) Freischnitt:



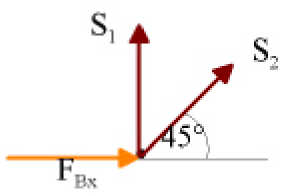
$$\sum F_x = 0 : F_{Ax} = F_{Bx}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Ay} = F = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 : -F \; 9 \text{ m} + F_{Bx} \; 4 \text{ m} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bx} = \frac{9}{4} 4 \text{ kN} = 9 \text{ kN} = F_{Ax}$$

b) Für Stabkraft 1 und 2:

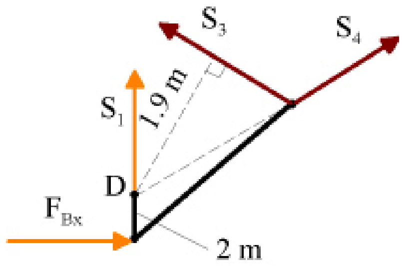


$$\sum F_x = 0 : F_{Bx} + s_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : s_1 + s_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bx} = s_1 = 9 \text{ kN} \quad \text{(Zug)}$$

Für Stabkraft 3 und 4:



Hebelarme / Längen werden aus der Zeichnung abgelesen!
Man darf sie natürlich auch berechnen.

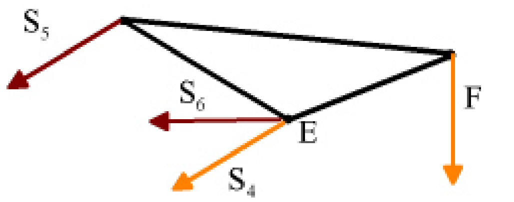
$$\sum M_{(D)} = 0 : s_3\ 1.9\ \mathrm{m} + F_{Bx}\ 2\ \mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow s_3 = -\frac{2}{1.9}\ 9\ \mathrm{kN} = \text{-}9.47\ \mathrm{kN} \qquad \text{(Druck)}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{Bx} + s_4\ \cos 18.4° - s_2\ \cos 18.4° = 0$$

$$\Rightarrow s_4 = -9.47\ \mathrm{kN}\ \text{-}\ \frac{9\ \mathrm{kN}}{\cos 18.4°} = -18.95\ \mathrm{kN} \quad \text{(Druck)}$$

Für Stabkraft 4 bis 6:



$$\sum M_{(E)} = 0 : -4\ \mathrm{kN}\ 2.9\ \mathrm{m} + s_5\ 1.95\ \mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow s_5 = 4\ \frac{3.0}{1.9}\ \mathrm{kN} = 6.32\ \mathrm{kN} \quad \text{(Zug)}$$

$$\sum M_{(F)} = 0 : -s_4\ 0.85\ \mathrm{m} - s_5\ 2.9\ \mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow s_4 = -6.32\ \frac{2.7}{0.9}\ \mathrm{kN} = -19\ \mathrm{kN} \qquad \text{(Druck)}$$

$$\sum F_y = 0 : -s_5\ \cos 18.5° - s_4\ \cos 18.5° - s_6 = 0$$

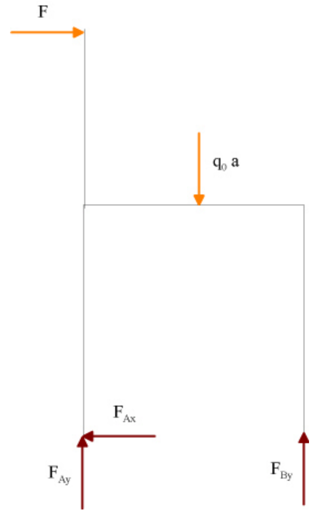
$$\Rightarrow s_6 = 12.02\ \mathrm{kN} \qquad \text{(Zug)}$$

c) Anzahl der Knoten: 6
Anzahl der Stäbe: 9
Anzahl der Lagerreaktionen: 3

$$2\ 6 = 9 + 3 \Rightarrow 12 = 12 \qquad \text{Stimmt!}$$

Aufgabe 2

Freischnitt



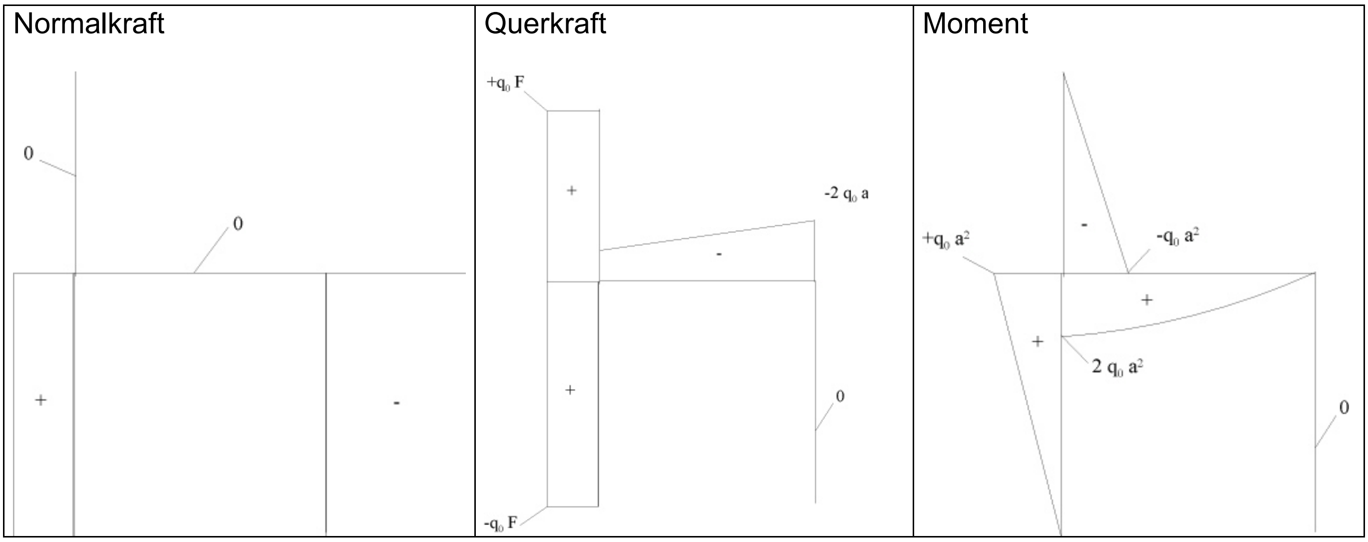
$$\sum F_x = 0 : F_{Ax} = F$$

$$\sum F_y = 0 : -q_0\ a + F_{Ay} + F_{By} = 0$$

$$\sum M_{(A)} = 0 : -q_0\ a\ \frac{a}{2} + F_{By}\ a - F\ 2\ a = 0$$

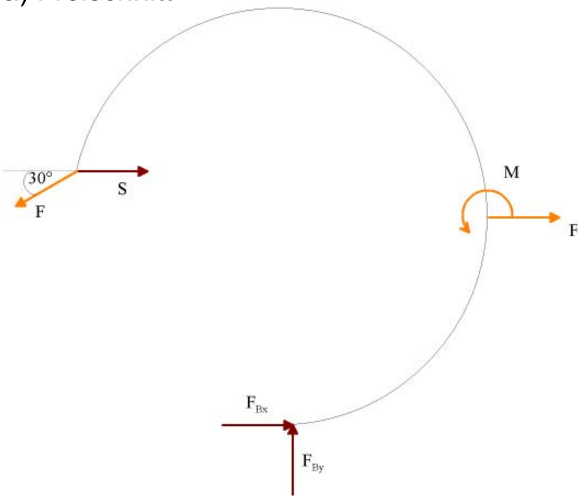
$$F_{By} = \frac{1}{2} q_0\ a + 2\ F \Rightarrow F_{By} = \frac{5}{2} q_0\ a$$

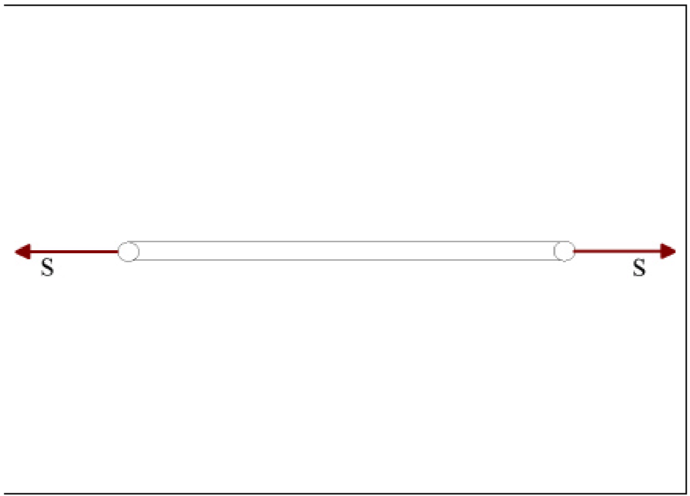
$$F_{Ay} = \frac{1}{2} q_0\ a - 2\ F \Rightarrow F_{Ay} = -\frac{3}{2} q_0\ a$$



Aufgabe 3

a) Freischnitt





b) $$\sum F_x = 0: -F\,\cos 30° + S + F + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F\,\sin 30° + F_{By} = 0$$

$$\sum M_{(B)} = 0: -S\,R + F\,\cos 30°\,R + F\,\sin 30°\,R + \underbrace{M}_{R\,F} - F\,R = 0$$

$$\Rightarrow S = F\left(\underbrace{\cos 30°}_{0.86} + \underbrace{\sin 30°}_{0.5}\right) = 1.37\,F$$ (Zugstab!)

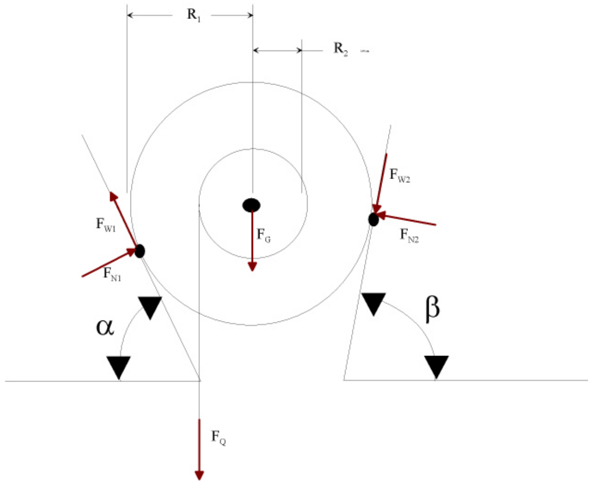
$$F_{By} = 0.5\,F$$

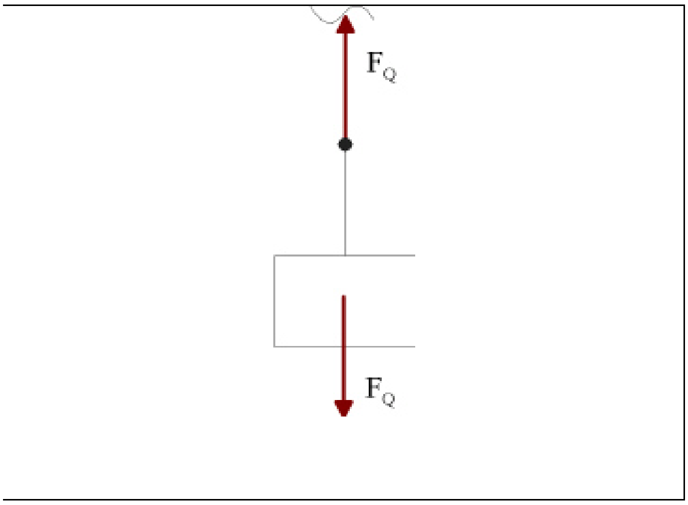
$$F_{Bx} = 0.86\,F - 1.37\,F\,F = -1.5\,F$$

c) Statisch bestimmtes System, da 3 Unbekannte: F_{Bx}, F_{By}, S und 3 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen.

Aufgabe 4

a) Freischnitt





5 Unbestimmte:

$F_{W1}, F_{W2}, F_{N1}, F_{N2}, F_Q$

b)

$$\sum F_x = 0 : F_{N1} \sin\alpha - F_{W1} \cos\alpha - F_{W2} \cos\beta - F_{N2} \sin\beta = 0$$

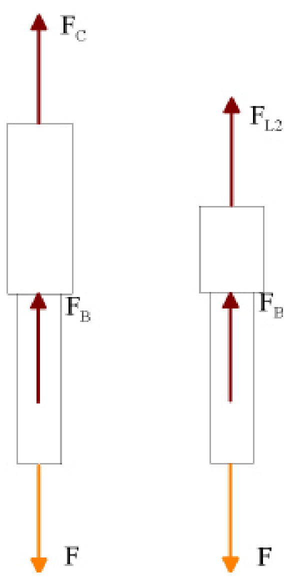
$$\sum F_y = 0 : -F_G + F_{N1} \cos\alpha + F_{W1} \sin\alpha - F_{W2} \sin\beta + F_{N2} \cos\beta - F_Q = 0$$

$$\sum M_{(0)} = 0 : F_Q\ R_1 - F_{W1}\ R_2 - F_{W2}\ R_2 = 0$$

$$F_{W1} = \mu_1\ F_{N1}$$

$$F_{W2} = \mu_2\ F_{N2}$$

Aufgabe 5



Gleichgewicht am freigeschnittenen Stab:

$\uparrow: -F + F_B + F_C = 0$ (1)

Problem ist einfach statisch unbestimmt, zusätzlich eine Verformungsbetrachtung:

$$v_B = \Delta l_2 = \Delta l_{2el} + \Delta l_{2T} = s$$
$$\Delta l_{2el} = \frac{F_{L2}\, l_2}{E\, A_2} = \frac{(F - F_B)\, l_2}{E\, A_2}$$
$$\Delta l_{2T} = l_2 \alpha T$$
$$\frac{(F - F_B)\, l_2}{E\, A_2} + l_2 \alpha T = s \qquad (2)$$

a)

$$F_B = 0 \Rightarrow F = F^*$$
$$\frac{F^*\, l_2}{E\, A_2} + l_2\, \alpha\, T = s \Rightarrow F^* = E\, A_2 \left(\frac{s}{l_2} - \alpha\, T \right)$$

b) i) Aus (2)

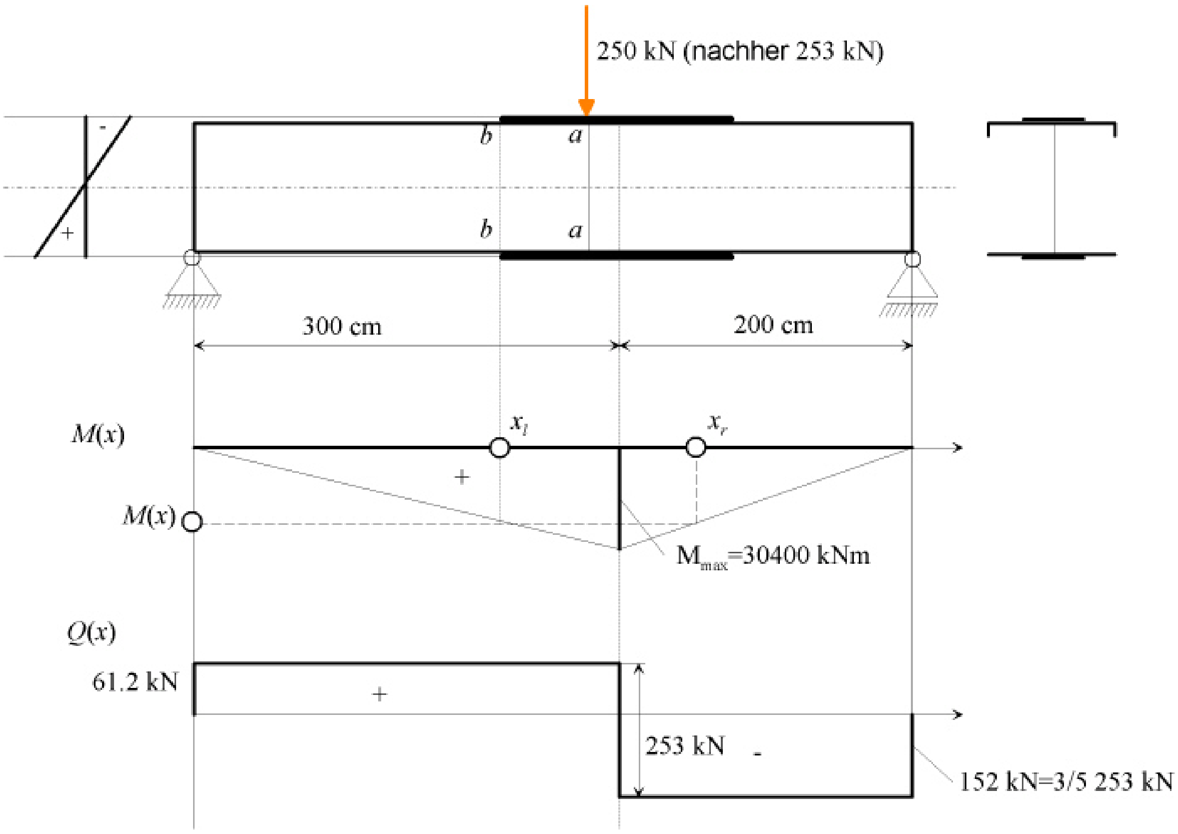
$$F_B = F - E\, A_2 \left(\frac{s}{l_2} - \alpha\, T \right)$$
$$F_C = F - F_B = E\, A_2 \left(\frac{s}{l_2} - \alpha\, T \right)$$

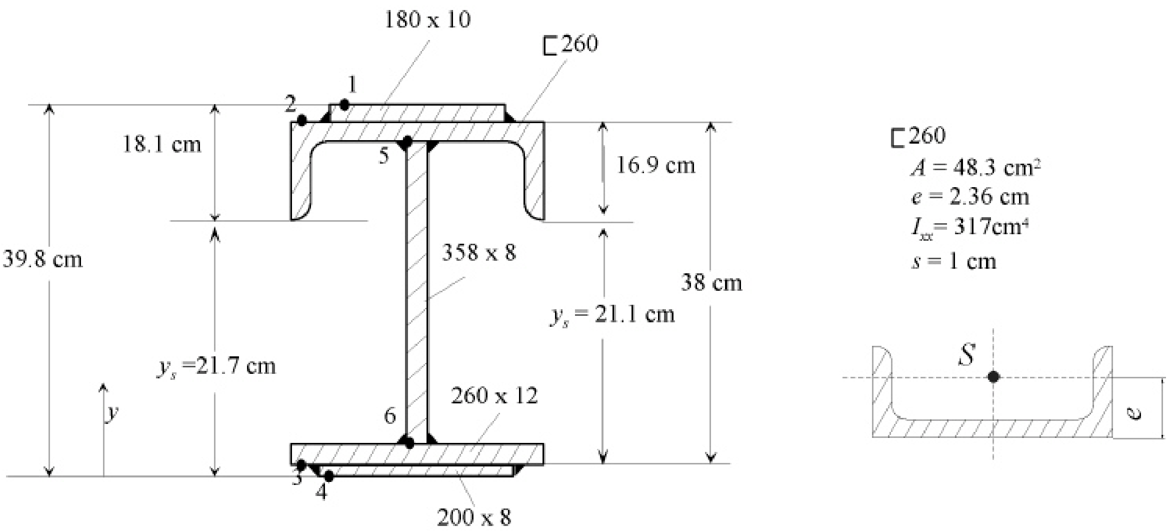
b) ii)

$$v_H = s + \frac{F\, l_1}{E\, A_1} + l_1\, \alpha\, T$$

Aufgabe 6

Querkraft- und Momentenverlauf:

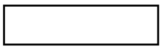
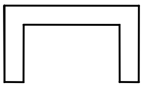
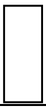
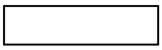
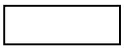




Als zulässige Belastung sei vorab notiert:

Druck: $\sigma_{zul} = -140 \dfrac{N}{mm^2}$, Zug: $\sigma_{zul} = 160 \dfrac{N}{mm^2}$, Schub: $\tau_{zul} = 0.65 \cdot \sigma_{zul}$. (A43.1)

Für den Spannungsnachweis berechnen wir in einem ersten Schritt das Flächenträgheitsmoment im verstärkten Teil des Trägers mit der Tabellenmethode:

Profil	A	y	$A\ y$	$\lvert a\rvert = \lvert y - y_S\rvert$	$a^2\ A$	I_0
	18.0	39.3	707	17.6	5576	–
	48.3	36.4	1758	14.7	10437	317
	28.6	19.9	569	1.8	93	3059
	31.2	1.4	44	20.3	12857	–
	16.0	0.4	6	21.3	7259	–
$\sum$	142.1		3084		$I_x = 39598\ \text{cm}^4$	

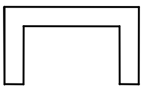
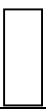
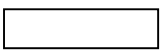
Darin wurden geringfügige Eigenanteile horizontal liegender Rechteckprofile vernachlässigt und im übrigen von folgender Formel Gebrauch gemacht:

$$I_0 = \frac{b\,h^3}{12}\,. \tag{A43.2}$$

Für den Schwerpunkt wurde in der Tabelle verwendet, dass gilt:

$$y_S = \frac{\sum A_i\ y_i}{\sum A_i} = \frac{3084}{142.1}\ \text{cm} = \underline{\underline{21.7\ \text{cm}}}\,. \tag{A43.3}$$

Im einem zweiten Schritt wird das Flächenträgheitsmoment im unverstärkten Teil des Trägers analog ermittelt:

Profil	A	y	$A\ y$	$\lvert a\rvert = \lvert y - y_S\rvert$	$a^2\ A$	I_0
	48.3	36.4	1758	14.5	10155	317
	28.6	19.9	569	2.0	114	3059
	31.2	1.4	44	20.5	13112	–
$\sum$	108.2		2371		$\hat{I}_{xx} = 26757\ \text{cm}^4$	

Für den Schwerpunkt wurde diesmal verwendet:

$$y_S = \frac{\sum A_i \; y_i}{\sum A_i} = \frac{2371}{108.1}\,\text{cm} = \underline{\underline{21.9\,\text{cm}}}\,. \tag{A43.4}$$

Beim Spannungsnachweis starten wir mit den Biegespannungen, also mit:

$$\sigma = \frac{M}{w}\,. \tag{A43.5}$$

Für die Widerstandmomente ergibt sich in den Positionen der Skizze:

$$w_1 = \frac{I_{xx}}{e_1} = \frac{39598\,\text{cm}^4}{18.1\,\text{cm}} = \underline{\underline{2188\,\text{cm}^3}}\;,\;\; w_4 = \frac{I_{xx}}{e_4} = \frac{39598\,\text{cm}^4}{21.7\,\text{cm}} = \underline{\underline{1825\,\text{cm}^3}}\;, \tag{A43.6}$$

$$w_2 = \frac{\hat{I}_{xx}}{e_2} = \frac{26757\,\text{cm}^4}{16.9\,\text{cm}} = \underline{\underline{1583\,\text{cm}^3}}\;,\;\; w_3 = \frac{\hat{I}_{xx}}{e_3} = \frac{26757\,\text{cm}^4}{21.1\,\text{cm}} = \underline{\underline{1268\,\text{cm}^3}}\;. \tag{A43.6}$$

Das Trägereigengewicht berücksichtigen wir mit folgender Überschlagsrechnung. Zunächst einmal ist der maximale Trägerquerschnitt gegeben durch (siehe Tabelle):

$$A_{\max} = 142.1\,\text{cm}^2\,. \tag{A43.7}$$

Mithin schätzen wir das Gewicht des Eisenträgers (!) ab zu:

$$G \approx \rho \cdot l \cdot A_{\max} \cdot g = 7.85 \cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5\,\text{m} \cdot 142.1 \cdot 10^{-4}\,g \approx 5.6\,\text{kN}\,, \tag{A43.8}$$

was folgender Streckenlast entspricht:

$$q = \frac{G}{l} = \frac{5.6\,\text{kN}}{5\,\text{m}} = \underline{\underline{1.1\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}}}\,. \tag{A43.9}$$

In der linken Mitte vor der eingeprägten Last $250\,\text{kN}$ sammeln sich somit $1.1\,\text{N/m} \cdot 3\,\text{m} = 3.3\,\text{kN}$ und in der rechts davon liegenden Mitte $1.1\,\text{N/m} \cdot 2\,\text{m} = 2.2\,\text{kN}$, was wir je zur Hälfte den $250\,\text{kN}$ zufügen (siehe Skizze weiter unten):

$$F_{\text{tot}} \approx 250\,\text{kN} + 3\,\text{kN} = \underline{\underline{253\,\text{kN}}}\,. \tag{A43.10}$$

Dies ist fürwahr eine sehr geringe Änderung. Es resultiert die eingangs aufgezeichnete Querkraft- und Momentenverteilung mit:

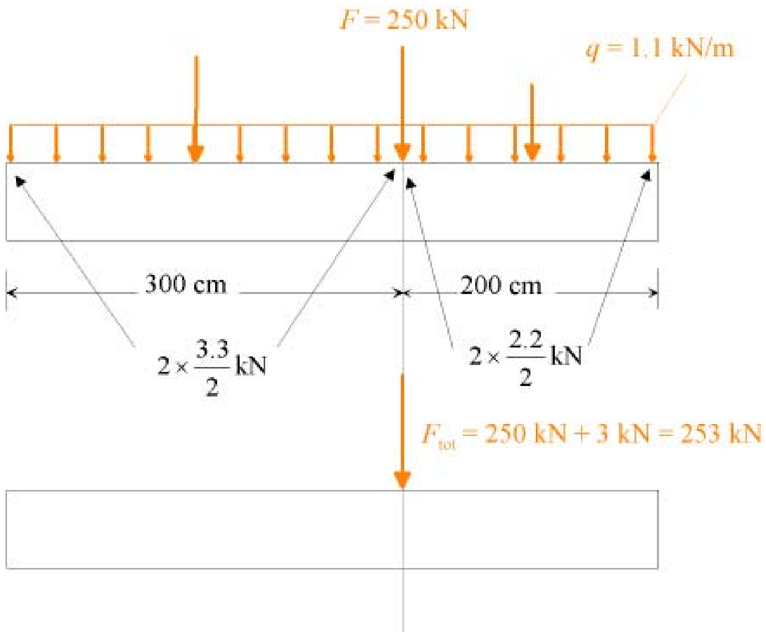
$$M_{\max} = 2\,\text{m} \cdot 152\,\text{kN} = \underline{\underline{30400\,\text{kNcm}}}\,. \tag{A43.11}$$

Damit können wir Gleichung (A43.5) endlich auswerten:

$$\sigma_1 = \frac{M_{\max}}{w_1} = \frac{30400\,\text{kNcm}}{2188\,\text{cm}^3} = \underline{\underline{139\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} \approx 140\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\;, \tag{A43.12}$$

$$\sigma_4 = \frac{M_{max}}{w_4} = \frac{30400\ \text{kNcm}}{1825\ \text{cm}^3} = \underline{\underline{167\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} \approx 160\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\,. \tag{A43.13}$$

Dies liegt, wie angedeutet, sehr nahe an den zulässigen Grenzwerten. Die Verstärkung des Balken ist also erforderlich! Wir wollen wissen, wie weit sie über die Stelle der Krafteinleitung hinausreichen muss. Dazu argumentieren wir wie folgt.



Es muss gelten:

$$\sigma_3 = \frac{M(x_L)}{w_3} = \sigma_{zul}\,(\text{Zug})\,. \tag{A43.13}$$

Und somit:

$$M_{zul} = M(x_L) = \sigma_{zul}\,(\text{Zug})\ w_3 = 160\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot 1268\ \text{cm}^3 = \underline{\underline{20288\ \text{kN cm}}}\,, \tag{A43.14}$$

also:

$$\frac{M_{max}}{3\ \text{m}} = \frac{M_{zul}}{x_L} \quad \Rightarrow \quad x_L = \frac{M_{zul}}{M_{max}}\cdot 3\ \text{m} = \frac{20288}{30400}\cdot 3\ \text{m} = \underline{\underline{2.0\ \text{m}}}\,. \tag{A43.15}$$

Als nächstes untersuchen wir die noch verbliebene Stelle im Profil:

$$\sigma_2 = \frac{M(\hat{x})}{w_2} = \sigma_{zul}\ (\text{Druck})\,. \tag{A43.16}$$

Analog:

$$\hat{M}_{zul} = M(\hat{x}) = \sigma_{zul}\,(\text{Druck})\ w_2 = 140\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot 1583\ \text{cm}^3 = \underline{\underline{22232\ \text{kN cm}}}\,, \tag{A43.17}$$

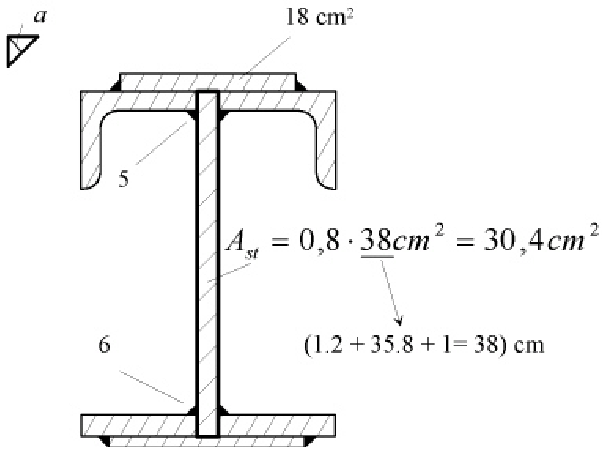
also:

$$\frac{M_{\max}}{3\text{ m}} = \frac{\hat{M}_{\text{zul}}}{\hat{x}_L} \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_L = \frac{\hat{M}_{\text{zul}}}{M_{\max}} \cdot 3\text{ m} = \frac{20288}{30400} \cdot 3\text{ m} = \underline{\underline{2.20\text{ m}}}\,. \tag{A43.18}$$

Entsprechend für die rechte Seite:

$$\frac{M_{\max}}{2\text{ m}} = \frac{M_{\text{zul}}}{5\text{ m} \cdot x_R} \quad \Rightarrow \quad x_R = 5\text{ m} - \frac{M_{\text{zul}}}{M_{\max}} \cdot 2\text{ m} = 5\text{ m} - \frac{20288}{30400} \cdot 2\text{ m} = \underline{\underline{3.7\text{ m}}}\,. \tag{A43.19}$$

Der Schubspannungsnachweis gestaltet sich wie folgt:



Für den Steg verwenden wir die folgende Näherungsformel:

$$\tau_{\text{St}} = \frac{152\text{ kN}}{30.4\text{ cm}^2} = 50\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 0.65 \cdot 140\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 91\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\,. \tag{A43.20}$$

In den Schweißnähten (Stärke $a = 3\text{ mm}$) finden wir mit der Formel:

$$\tau = \frac{Q\,\text{St}}{I_{xx}a} \tag{A43.21}$$

die folgenden Zahlenwerte:

$$\tau_5 = \frac{152\text{ kN}\left(18\text{ cm}^2 \cdot 17.6\text{ cm} + 48.3 \cdot 14.7\text{ cm}^3\right)}{39598\text{ cm}^4 \cdot 2 \cdot 0.3\text{ cm}} = \underline{\underline{66\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}\,, \tag{A43.22}$$

$$\tau_6 = \frac{152\text{ kN}\left(31.2\text{ cm}^2 \cdot 20.3\text{ cm} + 16.0 \cdot 21.3\text{ cm}^3\right)}{39598\text{ cm}^4 \cdot 2 \cdot 0.3\text{ cm}} = \underline{\underline{62\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}\,. \tag{A43.23}$$

Die Zahlenwerte bei der Berechnung der statischen Momente können den obigen Tabellen entnommen werden.

Aufgabe 7

a) Steifigkeiten:

$$EI_1 = 2000 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 1800 \text{ kNm}^2$$

Kräfte und Momente:

$$F_B = \frac{1}{6}\left[-8\;0.5 + 23\;0.5\right] = 1.25$$

$$F_{Ay} = -F_B = -1.25$$

$$M_{Ar} = -8 \text{ kN } 0.5 \text{ m} = -4 \text{ kNm}$$

$$M_{kl} = -8 \text{ kN } 0.5 \text{ m} - 1.25 \text{ kN } 3 \text{ m} = -7.75 \text{ kNm}$$

$$M_{kr} = +1.25 \text{ kN } 3 \text{ m} = +3.75 \text{ kNm}$$

Ersatzkräfte, Ersatzmomente:

$$F_a = \frac{2.0 + 3.88}{2}\,3.0\;10^{-3} = 8.82\;10^{-3}$$

$$F_b = \frac{1}{2}\,2.08\;3\;10^{-3} = 3.12\;10^{-3}$$

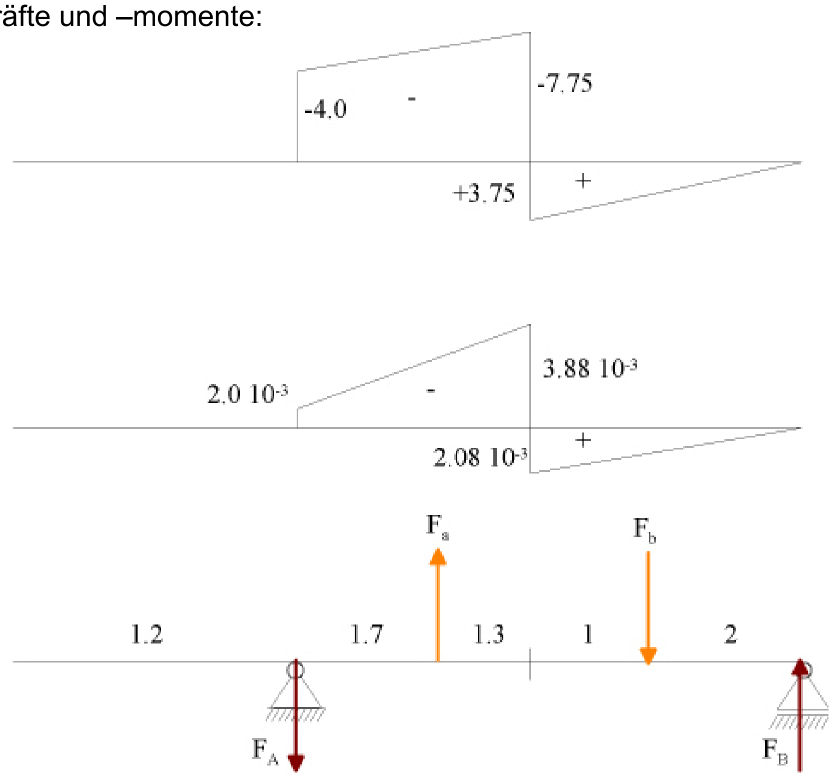
$$F_B = \frac{1}{6}\left[3.12\;10^{-3}\;4.0 - 8.82\;10^{-3}\;1.7\right] = -0.419\;10^{-3}$$

$$F_A = (8.82 - 3.12 - 0.419)\,10^{-3} = 5.28\;10^{-3}$$

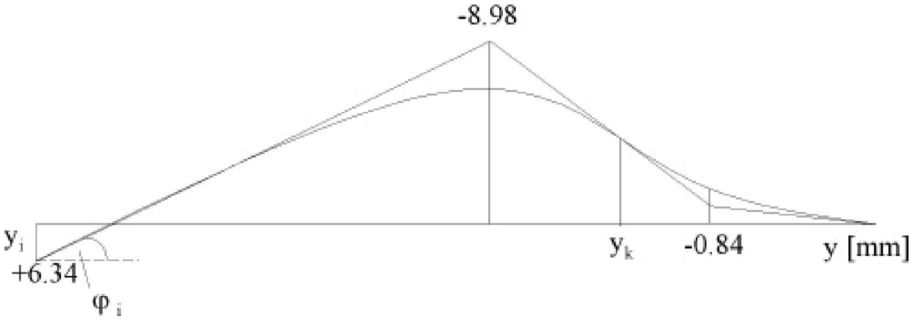
$$M_a = -5.28\;10^{-3}\;1.7 \text{ m} = -8.98 \text{ mm}$$

$$M_b = -0.419\;10^{-3}\;2.0 \text{ m} = -0.84 \text{ mm}$$

Skizze der Ersatzkräfte und –momente:



Skizze der Biegelinie:



b) Neigung bei i und Durchbiegung bei k:

$$\zeta_i = \frac{8.98 \text{ mm}}{1.7 \text{ m}} = 5.23\,10^{-3}$$

$$y_k = -\left[0.84 + \frac{(8.98 - 0.84)}{2.3}\,1.0\right] = -4.38$$