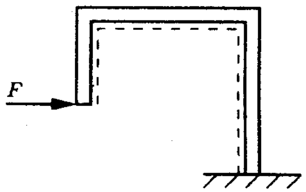
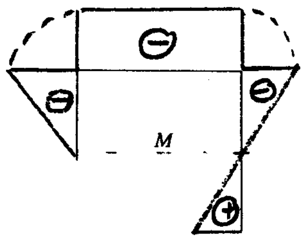
Kurzfragen

1. **(2 Punkte)** Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen in den Einheiten 1, N und m bzw. Vielfachen davon an.

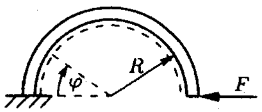
Polares Flächenträgheitsmoment I_p	m^4
Torsionsmoment M_T	Nm
Schubspannung τ	N/m^2
Gleitwinkel γ	1

2. **(1 Punkt)** Ein Rahmentragwerk ist wie skizziert durch eine horizontale Einzelkraft F belastet. Ziehen Sie die Momentenfläche M über den Rahmen **qualitativ** auf. Vorzeichen sind anzugeben. Orientieren Sie sich dazu an der strichlierten Linie!





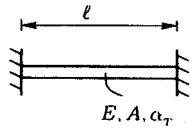
3. **(2 Punkte)** Der skizzierte Kreisbogenträger ist an einem Ende fest eingespannt und wird an seinem anderen Ende durch eine horizontale Einzelkraft F beansprucht. Wie groß sind Normalkraft und Schnittmoment bei einem Winkel $\varphi = 30°$? Gegeben: R, F, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$



$$N(\varphi = 30°) = -\frac{F}{2}$$

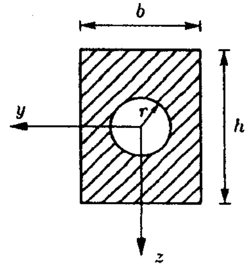
$$M(\varphi = 30°) = -\frac{F}{2}\cdot R$$

4. **(1 Punkt)** Ein Stab der Länge ℓ und Querschnittsfläche A, welcher zunächst ohne Vorspannung zwischen zwei starren Wänden gelagert ist, wird anschließend gleichförmig um ΔT erwärmt. Wie groß sind die Spannungen in dem Stab? Gegeben: E, A, α_T, ℓ, ΔT



$$\sigma = -E\alpha_T \Delta T$$

5. **(1 Punkt)** Der skizzierte symmetrische Querschnitt besteht aus einem Rechteck mit kreisförmigem Ausschnitt in der Rechteckmitte. Geben Sie das axiale Flächenträgheitsmoment bezüglich der Schwerachse z an! Gegeben: b, h, r



$$I_{zz} = \frac{1}{12} h b^3 - \frac{\pi}{4} r^4$$

Hinweis: Für einen Kreis vom Radius r beträgt das Flächenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse $I_{zz}^{Kreis} = \frac{\pi}{4} r^4$.

6. **(1 Punkt)** Kreuzen Sie die für Stahl typischen Materialkennwerte an!

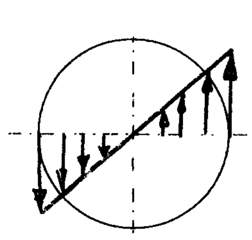
Elastizitätsmodul E	○ 20 GPa	☒ 200 GPa	○ 2000 GPa
Querkontraktionszahl ν	○ 3	○ $-0,3$	☒ 0,3
Ausdehnungskoeffizient α_T	○ $12 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{K}$	☒ $1,2 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{K}$	○ $1,2 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{K}$

7. **(2 Punkte)** Der skizzierte Träger mit kreisförmigen Querschnitt ist an seinem rechten Ende durch ein Torsionsmoment M_T belastet. Gegeben: M_T, ℓ, I_P, G

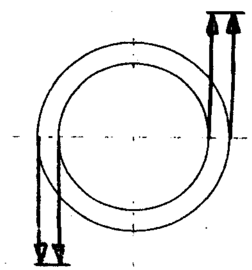
(a) Wie groß ist der Verdrehwinkel φ an der Stelle $x = \ell$?

$$\varphi(x = \ell) = \frac{M_T \cdot \ell}{G\, I_p}$$

(b) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Schubspannungen τ über den Kreisquerschnitt. Geben Sie zudem den Verlauf der Schubspannungen im Falle eines dünnwandigen Rohrquerschnitts an, wenn die Theorie dünnwandiger Hohlprofile vorausgesetzt wird.



Vollkreisquerschnitt



Dünnwandiger Rohrquerschnitt

Aufgabe 1:

(a) $EJw^{IV}(x) = q(x)$ mit $q(x) = -\frac{q_0}{\ell}x + q_0$

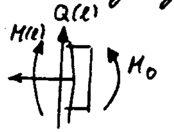
$$EJw^{IV}(x) = -\frac{q_0}{\ell}x + q_0$$
$$EJw'''(x) = -\frac{q_0}{\ell}\frac{x^2}{2} + q_0 x + C_1$$
$$EJw''(x) = -\frac{q_0}{\ell}\frac{x^3}{6} + q_0\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$
$$EJw'(x) = -\frac{q_0}{\ell}\frac{x^4}{24} + q_0\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$
$$EJw(x) = -\frac{q_0}{\ell}\frac{x^5}{120} + q_0\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

(b) Geometrische Randbedingungen: $I\ w(x=0)=0$

$II\ w'(x=0)=0$

Physikalische Randbedingungen: $III_A\ M(\ell) = M_0$

Stelle $x=\ell$: $IV_A\ Q(\ell) = 0$



Mit $M(x) = -EJw''(x)$ und $Q(x) = -EJw'''(x)$ folgen aus III_A und IV_A: $III_B\ -EJw''(\ell) = M_0$

$IV_B\ -EJw'''(\ell) = 0 \Rightarrow w'''(\ell) = 0$

(c) Berechnung der Integrationskonstanten:

aus $I \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$ aus $IV_B \Rightarrow -\frac{q_0}{\ell}\frac{\ell^2}{2} + q_0\ell + C_1 = 0$

aus $II \Rightarrow \underline{C_3 = 0}$ $\Rightarrow \underline{C_1 = -\frac{1}{2}q_0\ell}$

aus $III_B \overset{[C_1]}{\Rightarrow} \frac{q_0}{\ell}\frac{\ell^3}{6} - q_0\frac{\ell^2}{2} + \frac{1}{2}q_0\ell^2 - C_2 = M_0$

$\Rightarrow \underline{C_2 = +\frac{1}{6}q_0\ell^2 - M_0}$

(d) Absenkung bei $x=\ell$: $w(x=\ell) = \frac{1}{EJ}\left(-q_0\frac{\ell^4}{120} + q_0\frac{\ell^4}{24} - \frac{1}{2}q_0\frac{\ell^4}{6} + \frac{1}{12}q_0\ell^4 - \frac{M_0\ell^2}{2}\right)$

$$\underline{\underline{w(x=\ell) = \frac{q_0\ell^4}{30EJ} - \frac{M_0\ell^2}{2EJ}}}$$

(e) Querkraft: $Q(x) = -EJw'''(x) = \underline{\underline{\frac{q_0}{\ell}\frac{x^2}{2} - q_0 x + \frac{1}{2}q_0\ell}}$

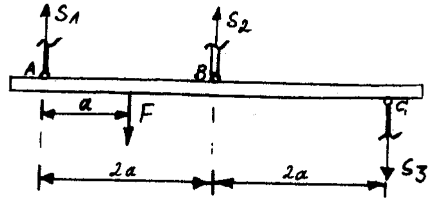
(f) Neigung: $w'(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{q_0}{\ell}\frac{x^4}{24} + q_0\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}q_0\ell\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}q_0\ell^2 x - M_0 x\right]$

$w'(\ell) = \frac{1}{EJ}\left[-q_0\frac{\ell^3}{24} + q_0\frac{\ell^3}{6} - \frac{1}{4}q_0\ell^3 + \frac{1}{6}q_0\ell^3 - M_0\ell\right] = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{24}q_0\ell^3 - M_0\ell\right]$ Forderung: $w'(\ell) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{M_0 = \frac{1}{24}q_0\ell^2}$

Aufgabe 3:

(a) Auswertung der GGB nach Theorie 1. Ordnung



$\Sigma M^{(A)} = 0$

$\Rightarrow -F\cdot a + S_2\cdot 2a - S_3\cdot 4a = 0\ (1)$

$\Sigma F_z = 0$

$\Rightarrow -S_1 + F - S_2 + S_3 = 0\ (2)$

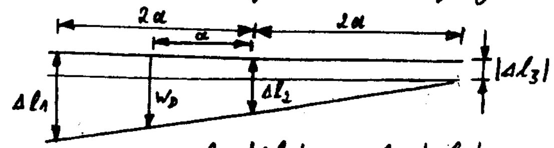
(b) Materialgesetze: $S_i = E_i A_i \frac{\Delta\ell_i}{\ell_i}$

Hier: $S_1 = E_1 A_1 \frac{\Delta\ell_1}{\ell}\ (3)_A$ bzw. $\Delta\ell_1 = \frac{S_1\cdot\ell}{E_1 A_1}\ (3)_B$

$S_2 = E_2 A_2 \frac{\Delta\ell_2}{\ell}\ (4)_A$ $\Delta\ell_2 = \frac{S_2\cdot\ell}{E_2 A_2}\ (4)_B$

$S_3 = E_1 A_1 \frac{\Delta\ell_3}{\ell/2}\ (5)_A$ $\Delta\ell_3 = \frac{S_3\cdot\ell}{2E_1A_1}\ (5)_B$

(c) Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Verschiebungsplan):



Strahlensatz: $\frac{\Delta\ell_1 - |\Delta\ell_3|}{4a} = \frac{\Delta\ell_2 - |\Delta\ell_3|}{2a} \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{1}{2}(\Delta\ell_1 + |\Delta\ell_3|)$

mit $|\Delta\ell_3| = -\Delta\ell_3$

$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta\ell_2 = \frac{1}{2}(\Delta\ell_1 - \Delta\ell_3)}}\ (6)$

(d) Stabkräfte: $(3)_B, (4)_B, (5)_B$ in (6) und Multiplikation mit $2E_1A_1\cdot\frac{1}{\ell}$

$\Rightarrow \frac{2E_1A_1}{E_2A_2}\cdot S_2 = S_1 - \frac{1}{2}S_3\ (7)$

aus (1) $\Rightarrow S_2 = 2S_3 + \frac{F}{2}\ (8)\ \ //\cdot(\frac{1}{4})$ +

aus (2) $\Rightarrow S_2 = -S_1 + S_3 + F\ (9)$

$\Rightarrow S_2\left[\frac{2E_1A_1}{E_2A_2} - \frac{1}{4} + 1\right] = -\frac{F}{8} + F \Rightarrow \underline{\underline{S_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7E_2A_2}{8E_1A_1 + 3E_2A_2}F}}\ (10)$

(10) in (8) $\Rightarrow$

$S_3 = \frac{1}{4}\frac{7E_2A_2}{8E_1A_1 + 3E_2A_2}F - \frac{1}{4}F = \frac{1}{4}\cdot\frac{4E_2A_2 - 8E_1A_1}{8E_1A_1 + 3E_2A_2}F = \underline{\underline{\frac{E_2A_2 - 2E_1A_1}{8E_1A_1 + 3E_2A_2}F}}\ (11)$

(10) und (11) in (9) $\Rightarrow \underline{\underline{S_1 = \frac{6E_1A_1 + \frac{1}{2}E_2A_2}{8E_1A_1 + 3E_2A_2}F}}\ (12)$

(e) (10) in $(3)_B$

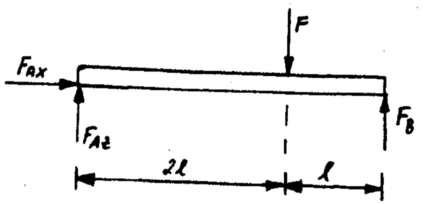
$\Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{7F\cdot\ell}{2(8E_1A_1 + 3E_2A_2)}$

(f) Strahlensatz: $\frac{\Delta\ell_2 - |\Delta\ell_3|}{2a} = \frac{w_0 - |\Delta\ell_3|}{3a}$

$\Rightarrow w_0 = \frac{1}{2}[3\Delta\ell_2 + \Delta\ell_3] = \frac{1}{4}\cdot\frac{19 + \frac{E_2A_2}{E_1A_1}}{8E_1A_1 + 3E_2A_2}F\cdot\ell$

Aufgabe 2:

(a) Freischnitt:



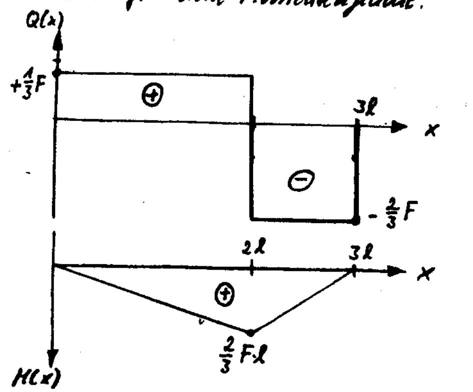
Gleichgewichtsbedingungen: $\Sigma M^{(A)} = 0 \Rightarrow F_B \cdot 3\ell - F \cdot 2\ell = 0$

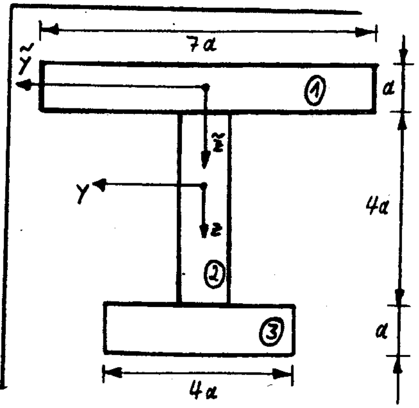
$$\underline{\underline{F_B = \frac{2}{3}F}}$$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F_{Az} + F_B - F = 0$

$$\underline{\underline{F_{Az}}} = F - F_B = \underline{\underline{\frac{1}{3}F}}$$

Querkraft- und Momentenfläche:





(b) Erweitertes Tabellenverfahren:

Teilfläche	$\tilde{z}_{si}$	A_i	$\tilde{z}_{si} A_i$	$a_i := \lvert \tilde{z}_{si} - \tilde{z}_S \rvert$	$a_i^2 A_i$	$J^{(i)}_{\xi\xi}$
①	0	$7a^2$	0	$2a$	$28a^4$	$\frac{7}{12}a^4$
②	$\frac{5}{2}a$	$4a^2$	$10a^3$	$\frac{a}{2}$	a^4	$\frac{64}{12}a^4 = \frac{16}{3}a^4$
③	$5a$	$4a^2$	$20a^3$	$3a$	$36a^4$	$\frac{1}{3}a^4$
Σ	–	$15a^2$	$30a^3$	–	$65a^4 + \frac{25}{4}a^4 = \underline{\underline{71{,}25a^4}}$	

$$\tilde{z}_S := \frac{\Sigma \tilde{z}_{si} A_i}{\Sigma A_i} = \frac{30a^3}{15a^2} = \underline{\underline{2a}}$$

$$\left[= \frac{285}{4}a^4\right]$$

(c) Schubspannungen an der Klebestelle K im Bereich $2\ell \le x \le 3\ell$:

$$\tau(x,z) = \frac{Q(x) \cdot S^*(z)}{J_{yy} \cdot b(z)}$$

Hier: $\underline{Q = -\frac{2}{3}F}$, $S^*(z_K) = z_S^* A^* = 3a \cdot 4a^2 = \underline{12a^3}$

$\underline{b(z_K) = a}$

$$\Rightarrow \tau(x_{II}, z_K) = \frac{-\frac{2}{3}F \cdot 12a^3}{71{,}25a^4 \cdot a} = \underline{\underline{-\frac{32}{285}\frac{F}{a^2}}}$$

(d) Widerstandsmoment:

$W_{y,o} := \dfrac{J_{yy}}{e_o}$ mit $e_o = \tilde{z}_S + \frac{a}{2} = \underline{\frac{5}{2}a} \Rightarrow W_{y,o} = \dfrac{\frac{285}{4}}{\frac{5}{2}}a^3 = \underline{\underline{28{,}5a^3}}$

$W_{y,u} := \dfrac{J_{yy}}{e_u}$ mit $e_u = 6a - e_o = \underline{\frac{7}{2}a} \Rightarrow W_{y,u} = \dfrac{\frac{285}{4}}{\frac{7}{2}}a^3 = \underline{\underline{\frac{285}{14}a^3}}$

Betragsmäßig maximale Zug- und Druckspannungen:

$$\sigma^{Zug}_{max} = \frac{M_{max}}{W_{y,u}} = \frac{\frac{2}{3}F\ell}{\frac{285}{14}a^3} = \underline{\underline{\frac{28}{855}\frac{F\ell}{a^3}}}$$

$$\left|\sigma^{Druck}\right|_{max} = \frac{M_{max}}{W_{y,o}} = \frac{\frac{2}{3}F\ell}{28{,}5a^3} = \underline{\underline{\frac{4}{171}\frac{F\ell}{a^3}}}$$